

L'OPTIMISATION MULTICRITÈRES EN ENVIRONNEMENT DÉCENTRALISÉ : UTILISATION DE LA MÉTHODE AHP POUR CHOISIR UNE SOLUTION PARETO-OPTIMALE

Chantal BARIL

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES
3351 boul. des Forges, C.P. 500
Trois-Rivières (Québec) - Canada
chantal.baril@uqtr.ca

RÉSUMÉ : *Ce papier est une extension des travaux effectués par Baril et al. (2009) sur le développement d'un Algorithme Interactif pour résoudre des Problèmes à Objectifs Multiples et considérant les Préférences des groupes de travail en Environnement Distribué (IPOMP-ED). Il propose la méthode Analytic Hierarchy Process (AHP) pour choisir une solution parmi les solutions Pareto-optimales générées par l'algorithme. Souvent ce choix est difficile puisque plusieurs solutions Pareto-optimales sont disponibles et il faut en choisir une seule pour implantation. La méthode AHP constitue un moyen intéressant car elle permet de considérer des critères qualitatifs qui ne peuvent pas être modélisés sous la forme d'une fonction objectifs et donc qui ne peuvent pas être considérés par l'algorithme. Un exemple montre l'application de la méthode.*

MOTS-CLÉS : *Optimisation multicritères, conception de produit, méthode AHP, environnement décentralisé*

1 INTRODUCTION

Lors de la conception d'un produit, il est souvent nécessaire que le travail soit réalisé par plusieurs équipes de travail, chacune étant responsable d'un sous-système et d'atteindre ses propres objectifs. Souvent ces objectifs sont reliés entre eux par le même ensemble de variables de conception et, dans certains cas, les objectifs peuvent être contradictoires. De plus, les équipes de travail sont souvent chapeautées par un directeur qui coordonne les activités de conception et qui s'assure que le système soit optimal. Le défi, pour le directeur et ses équipes de travail, est d'arriver à une solution, dite Pareto-optimale et, de compromis acceptable pour tout le monde.

On appelle l'ensemble des solutions Pareto-optimales, l'ensemble des solutions non dominées. Mathématiquement, un vecteur x^* est Pareto-optimal si il n'existe pas d'autre vecteur réalisable x tel que $f(x) \leq f(x^*)$, signifiant que $f_j(x) \leq f_j(x^*)$ pour tout $j = 1, \dots, n$ avec une inégalité stricte pour au moins un j (Chankong et Haimes, 1983). En général, pour les problèmes à multiples objectifs, la solution optimale obtenue par l'optimisation individuelle des objectifs n'est pas une solution réalisable au problème à multiples objectifs. Il faut alors trouver une solution de rechange qui est non dominée. Plusieurs techniques d'optimisation existent pour résoudre des problèmes multicritères (Diwekar, 2003).

Il y a les méthodes basées sur les préférences qui tentent de quantifier les préférences du décideur afin d'identifier

la solution qui satisfait au mieux ses préférences. Pour ce faire, il faut que le décideur formule ses préférences de façon formelle et structurée. Parmi les méthodes basées sur les préférences on retrouve la fonction d'utilité et la programmation par but (Chankong et Haimes, 1983), le *Linear Physical Programming* (Messac et al., 1996) qui peut être considérée comme un extension de la programmation par but, et finalement les techniques interactives (Chankong et Haimes, 1983). Cependant, peu d'algorithmes offrent, au décideur et à ses groupes de travail, la possibilité d'interagir entre eux pour trouver des solutions non dominées (Pareto-optimales) permettant d'explorer différentes options de conception (Tappetta et Renaud, 1999 ; Vassilev et al., 2001 ; Miettinen et Mäkelä, 2006). L'inconvénient de ces méthodes est que le décideur n'a pas de guide pour exprimer ses préférences : il doit déterminer un point de référence ou classer les fonctions objectifs en ordre de priorité.

Il y a aussi les méthodes génératives, qui cherchent à trouver l'ensemble exact des solutions Pareto-optimales (ou une approximation de cet ensemble) afin que le décideur puisse choisir une solution parmi cet ensemble pour implantation. Parmi les méthodes génératives on retrouve le *Compromise Programming*. (Mistree, 1993), la méthode des poids, la méthodes des contraintes (Diwekar, 2003) et les algorithmes évolutionnaires (Coello et al., 2002; Deb et Gupta, 2006; Sinha, 2007; Daum et al., 2007; Salazar et Rocco, 2007; Gong et Cai, 2009). L'inconvénient de ces méthodes est que plusieurs solutions Pareto-optimales sont générées et le décideur doit en choisir une seule pour implantation. Il est alors nécessaire d'utiliser une approche pour assister le décideur dans ce choix. (Taboada et al., 2007).

Dans un premier temps, ce papier présente un algorithme interactif pour résoudre des problèmes à objectifs multiples tenant compte des préférences des décideurs en environnement décentralisé (IPOMP-ED). L'algorithme génère des solutions Pareto-optimales répondant le plus possible aux exigences des groupes de travail et du directeur. Dans un deuxième temps, la méthode AHP est proposée pour choisir une solution Pareto-optimale pour implantation parmi celles générées par l'algorithme.

Le papier est donc organisé comme suit: la section 2 présente l'algorithme IPOMP-ED utilisé pour obtenir les solutions Pareto-optimales, la section 3 présente le fonctionnement de la méthode AHP, la section 4 montre un exemple numérique pour illustrer l'approche proposée et finalement la section 5 donne les conclusions sur les travaux effectués.

2 L'ALGORITHME IPOMP-ED

L'algorithme IPOMP-ED est en fait une combinaison d'un algorithme interactif pour résoudre un problème à objectifs multiples tenant compte des préférences des décideurs (Baril *et al.*, 2007) et d'une structure d'optimisation collaborative (Gu *et al.*, 2006) pour caractériser l'environnement décentralisé. Comme montré à la figure 1, la structure d'optimisation de l'algorithme IPOMP-ED comporte deux niveaux.

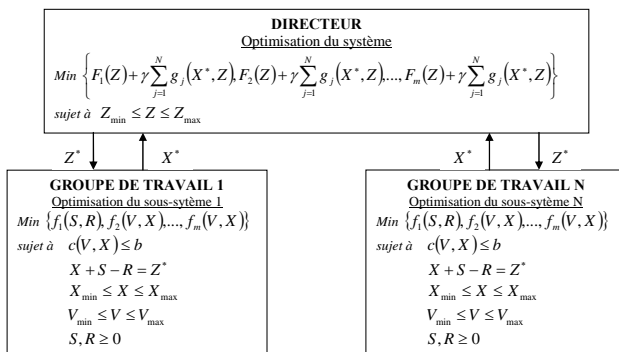


Figure 1 : Structure d'optimisation collaborative

Dans cette structure, Z représente le vecteur des variables décisionnelles du système, X est le vecteur des variables décisionnelles multidisciplinaires (utilisées par plus d'un groupe de travail), V est le vecteur des variables décisionnelles disciplinaires, S et R sont des variables d'écart et de surplus respectivement et (*) représente un paramètre.

Au premier niveau, le directeur résout un problème multicritères pour optimiser les performances du système ou de l'organisation. Au deuxième niveau, les groupes de travail résolvent simultanément des problèmes multicritères dont une fonction de compatibilité. Chaque décideur (au premier et au deuxième niveau) peut contrôler le même ensemble de variable. Cette structure peut ressembler au *bi-level programming* mais elle est différente puisqu'il y a collaboration entre les deux niveaux.

Son fonctionnement est le suivant : 1) le directeur résout un problème multicritères (algorithme IPOMP) et obtient des valeurs optimales Z^* . Ces valeurs sont envoyées aux groupes de travail au deuxième niveau où elles sont considérées comme des paramètres. 2) Les groupes de travail résolvent simultanément des problèmes multicritères (algorithme IPOMP) pour leurs sous-systèmes respectifs et obtiennent des valeurs X^* . Ces valeurs sont retournées au directeur où elles sont considérées comme des paramètres dans son problème d'optimisation (dans le terme de pénalité). 3) les étapes 1 et 2 sont répétées tant qu'une solution n'a pas été trouvée. La cohérence entre les groupes de travail est assurée par le terme de pénalité dans les fonctions-objectifs du problème du directeur et par les fonctions-objectifs de compatibilité des groupes de travail.

Les avantages de cette structure sont : 1) le développement d'un produit (système) optimal qui ne correspond pas nécessairement à la juxtaposition des optimas de chacun des sous-systèmes, 2) une flexibilité accrue laissée aux groupes de travail et 3) la résolution de problème complexe ayant plusieurs objectifs et plusieurs variables. L'algorithme IPOMP (Baril *et al.*, 2007), utilisé à chacun des niveaux de la structure d'optimisation décentralisée, est basée sur le *Goal Programming* pour résoudre les problèmes multicritères. A chacun des niveaux, les décideurs déterminent leurs préférences pour leurs fonction-objectifs. Ces préférences sont choisies selon des degrés de désirabilités déterminés par les compétences des groupes de travail et d'après l'espace paramétrique réduit des solutions réalisables.

Le diagramme de processus présenté à la figure 2 explique le fonctionnement de l'algorithme pour générer une solution Pareto-optimale. Les détails des 25 étapes de l'algorithme IPOMP-ED et des exemples d'application sont présentés dans Baril *et al.* (2009).

3 LA MÉTHODE AHP

La méthode *Analytic hierarchy Process* (AHP), développée par Saaty (1980), est conçue pour solutionner des problèmes multicritères complexes. Le processus hiérarchique exige que les décideurs fournissent un jugement sur l'importance relative de chaque critère et spécifient une préférence pour chacune des alternatives en utilisant chacun des critères. Le résultat permet d'établir des priorités accordées à chacune des alternatives basées sur les préférences émises par les décideurs.

Cette méthode a été utilisée pour plusieurs applications différentes (Vaidya et Kumar, 2006). Récemment, la méthode AHP a été employée pour évaluer l'impact des technologies sur les objectifs d'une organisation (Gerdri et Kocaoglu, 2007) et pour la sélection de machine (Chang *et al.*, 2007). Une revue de la littérature complète a été réalisé par Ho (2008).

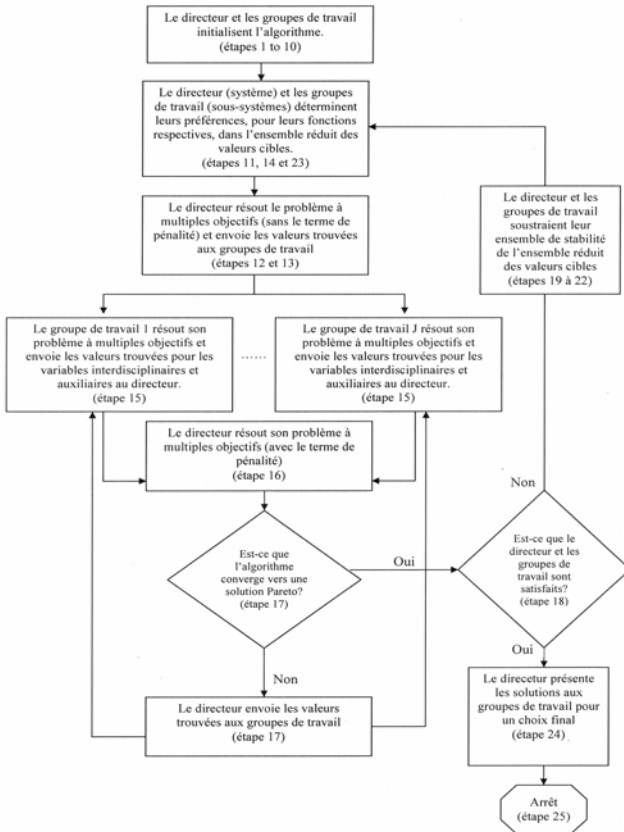


Figure 2 : Fonctionnement de l'algorithme IPOMP-ED (Baril *et al.* 2009)

Dans ce papier, cette méthode sera utilisée pour établir la priorité parmi les solutions Pareto-optimales obtenues lors de l'optimisation d'un problème multicritères. Les avantages de la méthode AHP sont les suivants : 1) elle permet de considérer d'autres variables sans l'obligation de les intégrer dans le modèle mathématique et 2) elle permet de résoudre des problèmes de plus grande taille. Certaines tentatives ont été faites par le passé pour jumeler la méthode AHP avec des techniques d'optimisation multicritères mais aucune ne concerne l'utilisation de la méthode AHP pour choisir une solution Pareto-optimale. En effet, Alidi (1996), Topaloglu (2006) et Lorenzo et Villa (2007) l'ont utilisé pour établir les priorités des fonctions-objectifs lors de la résolution de problèmes par le *Goal Programming* tandis que Ozdemir et Gusimov (2004) l'utilisent pour calculer les poids des fonctions-objectifs lors de la résolution du problème avec la méthode des poids. La méthode AHP est souvent illustrée de façon graphique comme montrée à la figure 3.

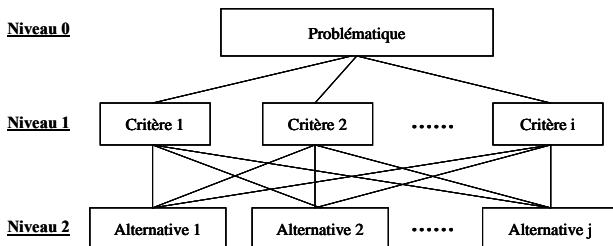


Figure 3 : La méthode AHP

Les principales étapes de la méthode sont les suivantes :

1. Définir le problème en une phrase claire et concise.
2. Créer la liste des critères d'évaluation. Les décideurs doivent obtenir un consensus sur les critères finaux et leurs significations.
3. A l'aide d'une matrice, pondérer tous les critères les uns par rapport aux autres. Cette étape implique que des facteurs de pondération et leur définition soient spécifiés.
4. A l'aide d'une matrice, comparer toutes les alternatives en fonction de chaque critère pondéré. Il y aura autant de matrices d'alternatives que de critères à appliquer. Les mêmes facteurs de pondération peuvent être utilisés mais leurs définitions doivent être personnalisées.
5. A l'aide d'une matrice résumée, comparer chaque alternative sur la base de tous les critères combinés.
6. Finalement, choisir la meilleure alternative. Cette alternative correspond à la valeur décimale relative maximale.

La section suivante montre un exemple de l'utilisation de la méthode AHP pour choisir une solution Pareto-optimale.

4 LE CHOIX D'UNE SOLUTION PARETO-OPTIMALE PAR LA MÉTHODE AHP

Afin d'illustrer la méthode proposée, un problème purement mathématique a été choisi. Le problème comprend cinq variables de décision, trois fonctions-objectifs non linéaires et trois contraintes linéaires. Le problème a été développé originalement par Abdel Haleem (1991) et se décrit comme suit:

$$\text{Min } f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - x_4 - 3x_5 \quad (1)$$

$$\text{Min } f_2 = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3 - 5x_4 - 2x_5 \quad (2)$$

$$\text{Min } f_3 = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5 \quad (3)$$

$$\text{sujet à } c_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 6 \quad (4)$$

$$c_2 = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10 \quad (5)$$

$$c_3 = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 15 \quad (6)$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 10 \quad (7)$$

La décomposition du problème original permettra d'assigner les fonction-objectifs au directeur (optimisation du système) et aux groupes de travail (optimisation des sous-systèmes). Supposons qu'il y ait deux objectifs au niveau système à minimiser. Le directeur doit donc résoudre ce problème:

$$\text{Min } f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - x_4 - 3x_5 \quad (8)$$

$$\text{Min } f_2 = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3 - 5x_4 - 2x_5 \quad (9)$$

$$\text{sujet à } 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 10 \quad (10)$$

On suppose que le groupe 1 contrôle la contrainte $c_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 6$. Le problème du groupe de travail 1 est :

$$\text{Min } \text{fonction de compatibilité} \quad (11)$$

$$\text{sujet à } c_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 6 \quad (12)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (13)$$

On suppose que le groupe 2 contrôle les contraintes $c_2(x) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10$ et $c_3(x) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 15$ et deux fonctions-objectifs : la fonction-objectif de compatibilité et la fonction-objectif $f_3 = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5$. Le problème du groupe de travail 2 est :

$$\text{Min } \text{fonction de compatibilité} \quad (14)$$

$$\text{Min } f_3 = 3x_1 + x_2^2 - 5x_3 + x_4^2 - 2x_5 \quad (15)$$

$$\text{sujet à } c_2(x) = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 10 \quad (16)$$

$$c_3(x) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 15 \quad (17)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (18)$$

Avec cette décomposition il n'y a que des variables interdisciplinaires x_{ij} . Puisque ces variables sont utilisées par les groupes de travail 1 et 2, elles doivent être doublées pour obtenir: x_{i1} pour le groupe 1 et x_{i2} pour le groupe 2. Donc la transformation des variables se fait selon le tableau 1.

Transformation des variables		
Variabes du Groupe 1	Variabes du Groupe 2	Valeur cible au niveau Système
x_{11}	x_{12}	$(z_{\text{int}})_1$
x_{21}	x_{22}	$(z_{\text{int}})_2$
x_{31}	x_{32}	$(z_{\text{int}})_3$
x_{41}	x_{42}	$(z_{\text{int}})_4$
x_{51}	x_{52}	$(z_{\text{int}})_5$

Tableau 1: Transformation des variables pour le problème de Abdel Haleem (1991).

À l'aide de ces nouvelles variables, il est alors possible de formuler le problème selon la structure d'optimisation de Gu *et al.* (2006) afin de le résoudre dans un environnement décentralisé. La figure 4 montre la formulation décentralisée du problème d'Abdel Haleem (1991) et permet de faire le parallèle avec la structure présentée à

la figure 1. Le problème a été résolu avec l'algorithme IPOMP-ED développé par Baril *et al.* (2009).

Comme défini au logigramme de la figure 5, l'algorithme oblige dans un premier temps la réduction de l'espace paramétrique des solutions réalisables pour chacun des problèmes (directeur et groupes de travail). En fait, ces étapes de l'algorithme permettent de connaître les valeurs minimales et maximales que peuvent prendre chacune des fonctions-objectifs selon les contraintes du problème.

L'espace réduit des valeurs cibles pour f_1 est l'ensemble $-15 \leq b_1 \leq -5$, pour f_2 est l'ensemble $-25 \leq b_2 \leq -10$ et pour f_3 est l'ensemble $b_3 \geq -15$.

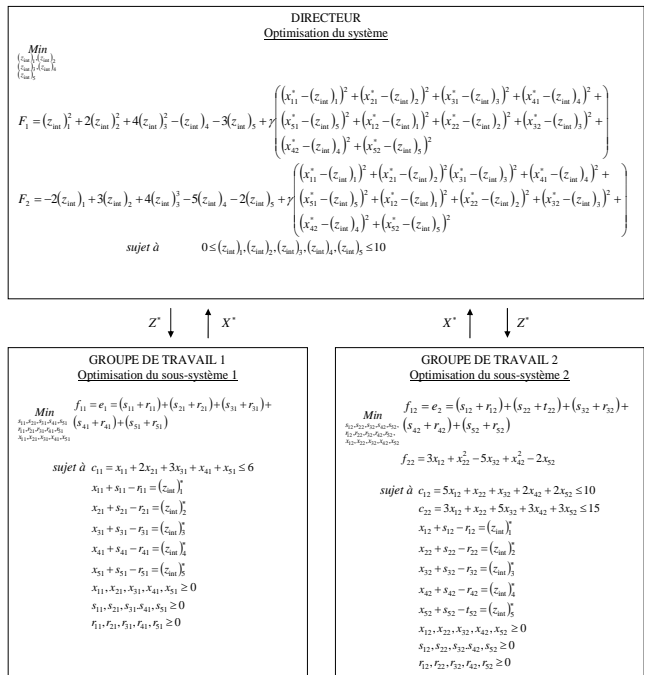


Figure 4 : La formulation décentralisée du problème mathématique

Par la suite, les décideurs peuvent diviser cet espace selon leur degrés de désirabilités : I pour idéale, D pour désirable, T pour tolérable, ID pour indésirable et IA pour inacceptable. Les degrés de désirabilité fixés par le directeur (f_1 et f_2) et le groupe de travail 2 (f_3) sont présentés au tableau 2.

Critère	I	D	T	ID	IA
f_1	-13.3	-11.6	-9.9	-8.2	-6.5
f_2	-21.25	-17.5	-13.75	-10	-
f_3	-11.25	-2.1875	6.875	15.9375	25

Idéale \leq I -- I < Désirable \leq D -- D < Tolérable \leq T
 T < Indésirable \leq ID -- ID < Inacceptable \leq IA

Tableau 2 : Degrés de désirabilité pour le problème mathématique de Abdel Haleem (1991).

Il faut noter que les degrés de désirabilité n'ont pas besoin d'être équidistants. Ces degrés de désirabilité sont utilisés dans un premier temps pour fixer leurs préférences b_m pour chacune des fonctions-objectifs et par la suite pour évaluer les solutions Pareto-optimales obtenues par l'algorithme IPOMP-ED. Le tableau 3 présente un résumé des solutions obtenues. Le vecteur b_m représente les valeurs désirées (préférences) par les décideurs pour chacune des fonctions-objectifs du problème, tandis que les valeurs des fonctions-objectifs f_m sont les valeurs obtenues lors du processus d'optimisation.

Vecteur des préférences (b_m)	Valeurs des fonctions-objectifs (f_m) et évaluation selon les degrés de désirabilité
$f_1 = -15$ (Idéal)	$f_1 = -15$ (Idéal)
$f_2 = -25$ (Idéal)	$f_2 = -10$ (Indésirable)
$f_3 = -11.25$ (Idéal)	$f_3 = -10$ (Désirable)
Solution Pareto-optimale (S1)	(0, 0, 0, 0, 5)
$f_1 = -12$ (Désirable)	$f_1 = -12$ (Tolérable)
$f_2 = -18$ (Désirable)	$f_2 = -14.5$ (Tolérable)
$f_3 = -1$ (Tolérable)	$f_3 = -4.75$ (Désirable)
Solution Pareto-optimale (S2)	(0, 0, 0, 1.5, 3.5)
$f_1 = -10.5$ (Tolérable)	$f_1 = -10.5$ (Tolérable)
$f_2 = -19$ (Désirable)	$f_2 = -16.75$ (Tolérable)
$f_3 = 6$ (Tolérable)	$f_3 = -0.4375$ (Tolérable)
Solution Pareto-optimale (S3)	(0, 0, 0, 2.25, 2.75)
$f_1 = -8$ (Indésirable)	$f_1 = -11$ (Tolérable)
$f_2 = -16$ (Tolérable)	$f_2 = -16$ (Tolérable)
$f_3 = -11$ (Désirable)	$f_3 = -2$ (Tolérable)
Solution Pareto-optimale (S4)	(0, 0, 0, 2, 3)
$f_1 = -10$ (Indésirable)	$f_1 = -11.33$ (Indésirable)
$f_2 = -15.5$ (Tolérable)	$f_2 = -15.5$ (Tolérable)
$f_3 = -3$ (Désirable)	$f_3 = -2.97$ (Désirable)
Solution Pareto-optimale (S5)	(0, 0, 0, 1.83, 3.17)

Tableau 3 : Solutions Pareto-optimales obtenues pour le problème mathématique d'Abdel Haleem (1991).

La meilleure solution Pareto-optimale obtenue, selon les degrés de désirabilité fixés par le décideur, est la solution 2. En effet, les fonctions-objectifs f_1 et f_2 atteignent un niveau tolérable tandis que la fonction-objectif f_3 atteint le niveau désirable. Cependant, il est possible que d'autres critères puissent intervenir dans le processus de sélection. Par exemple, il serait intéressant de choisir une solution qui est robuste et qui est peu dispendieuse. Outre les critères quantitatifs, des critères qualitatifs peuvent aussi être envisagés. Ainsi, pour un problème de conception de produit des critères de confort, de style, de texture, etc., pourraient aussi être considérés. Le fait que la méthode AHP considère des critères qualitatifs est un

avantage considérable puisque souvent ces critères sont difficilement modélisables et ne peuvent être traités comme des objectifs à optimiser.

Voyons maintenant comment utiliser la méthode AHP pour choisir une solution Pareto-optimale parmi les 5 solutions générées par l'algorithme. Comme montré à la figure 5, les critères d'évaluation sont les suivantes : les degrés de désirabilité, la robustesse et le coût de la solution Pareto-optimale.

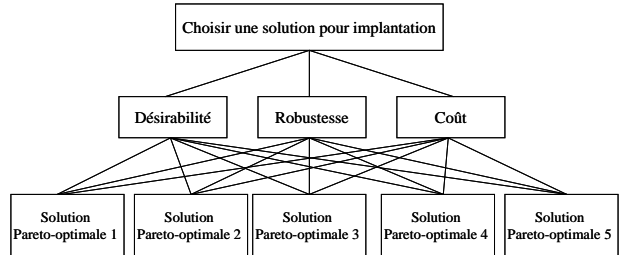


Figure 5 : La méthode AHP pour le choix d'une solution Pareto-optimale selon les trois critères retenus

Les degrés de désirabilité sont les suivants : I = idéal, D = désirable, T = tolérable, ID = indésirable et IA = inacceptable.

La robustesse de chacune des solutions peut être estimée par la variance avec la formule de la propagation des erreurs :

$$\sigma_{f_m}^2 = \sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (19)$$

Pour le problème mathématique, les formules d'estimation de la variance des fonctions-objectifs sont les suivantes :

$$\sigma_{f_1}^2 = (2x_1)^2 \sigma_{x_1}^2 + (4x_2)^2 \sigma_{x_2}^2 + (8x_3)^2 \sigma_{x_3}^2 + \quad (20)$$

$$(-1)^2 \sigma_{x_4}^2 + (-3)^2 \sigma_{x_5}^2$$

$$\sigma_{f_2}^2 = (-2)^2 \sigma_{x_1}^2 + (3)^2 \sigma_{x_2}^2 + (12x_3)^2 \sigma_{x_3}^2 + \quad (21)$$

$$(-5)^2 \sigma_{x_4}^2 + (-2)^2 \sigma_{x_5}^2$$

$$\sigma_{f_3}^2 = (3)^2 \sigma_{x_1}^2 + (2x_2)^2 \sigma_{x_2}^2 + (-5)^2 \sigma_{x_3}^2 + \quad (22)$$

$$(2x_4)^2 \sigma_{x_4}^2 + (-2)^2 \sigma_{x_5}^2$$

Pour chaque solution Pareto-optimale, les variances ont été additionnées pour obtenir une robustesse totale par solution Pareto-optimale. Il faut noter que ces fonctions-objectifs auraient tout aussi bien pu être intégrées dans les problèmes d'optimisation multicritères du directeur et des groupes de travail.

Le coût de la solution peut représenter par exemple le coût de fabrications des pièces x : $x_1 = 40\$$, $x_2 = 20\$$, $x_3 = 10\$$, $x_4 = 1\$$ et $x_5 = 5\$$. Le tableau 4 présente le calcul de chacun des critères pour chacune des solutions Pareto-optimales :

Critères → Solutions ↓	Désirabilité	Robustesse (variance)	Coût
Solution 1 (0, 0, 0, 0, 5)	$f_1 = -15$ (I) $f_2 = -10$ (ID) $f_3 = -10$ (D)	$\sigma_{f_1}^2 = 0.1$ $\sigma_{f_2}^2 = 0.42$ $\sigma_{f_3}^2 = 0.38$ Total = 0.90	$0*40\$+0*20\$$ $+0*10\$+0*1\$$ $+5*5\$ = 25\$$
Solution 2 (0, 0, 0, 1.5, 3.5)	$f_1 = -12$ (T) $f_2 = -14.5$ (T) $f_3 = -4.75$ (D)	$\sigma_{f_1}^2 = 0.1$ $\sigma_{f_2}^2 = 0.42$ $\sigma_{f_3}^2 = 0.47$ Total= 0.99	$0*40\$+0*20\$$ $+0*10\$+1.5*1\$$ $+3.5*5\$ = 19\$$
Solution 3 (0, 0, 0, 2.25, 2.75)	$f_1 = -10.5$ (T) $f_2 = -16.75$ (T) $f_3 = -0.4375$ (T)	$\sigma_{f_1}^2 = 0.1$ $\sigma_{f_2}^2 = 0.42$ $\sigma_{f_3}^2 = 0.56$ Total=1.08	$0*40\$+0*20\$$ $+0*10\$+2.25*1\$$ $+2.75*5\$ = 16\$$
Solution 4 (0, 0, 0, 2, 3)	$f_1 = -11$ (T) $f_2 = -16$ (T) $f_3 = -2$ (T)	$\sigma_{f_1}^2 = 0.1$ $\sigma_{f_2}^2 = 0.42$ $\sigma_{f_3}^2 = 0.54$ Total=1.06	$0*40\$+0*20\$$ $+0*10\$+2*1\$$ $+3*5\$ = 17\$$
Solution 5 (0, 0, 0, 1.83, 3.17)	$f_1 = -11.33$ (ID) $f_2 = -15.5$ (T) $f_3 = -2.97$ (D)	$\sigma_{f_1}^2 = 0.1$ $\sigma_{f_2}^2 = 0.42$ $\sigma_{f_3}^2 = 0.51$ Total=1.03	$0*40\$+0*20\$$ $+0*10\$+1.83*1\$$ $+3.17*5\$ = 17.68\$$

Tableau 4 : Calcul des critères pour chacune des solutions Pareto-optimales (S)

La première étape consiste à pondérer les critères les uns par rapport aux autres. Pour ce faire l'échelle suivante sera utilisée (Brassard et Ritter, 2001) :

- 1 : Importance égale
- 5 : Plus important
- 10 : Bien plus important
- 1/5 : Moins important
- 1/10 : Bien moins important

Chaque fois qu'un facteur de pondération est enregistré dans la cellule d'une rangée (par exemple, 1, 5, 10) sa valeur inverse (1, 1/5, 1/10) doit être enregistrée dans la cellule de la colonne correspondante. Le tableau 5 présente le résultat de cette comparaison.

Critères	Désirabilité	Variance	Coût	Total de la rangée	Valeur décimale relative
Désirabilité		1	5	6	0.347
Variance	1		1/10	1.1	0.063
Coût	1/5	10		10.2	0.590
Total				17.3	100

Tableau 5 : Pondération critères à critères

La deuxième étape permet de comparer les solutions Pareto-optimales en fonction de chacun des critères pondérés. Pour ce faire, il faut créer une matrice avec toutes les solutions Pareto-optimales sur l'axe vertical et sur l'axe horizontal et les critères énumérés dans le coin gauche de la matrice.

Il faut construire autant de matrices qu'il y a de critères. La même échelle (1, 5, 10, 1/5, 1/10) est utilisée pour comparer les solutions Pareto-optimales les unes aux autres, mais les énoncés sont différents. Le nombre entier (1, 5, 10) doit toujours représenter une évaluation désirable. Selon le cas, il peut s'agir d'un « moins » comme pour un coût ou d'un « plus » comme pour une satisfaction.

Le tableau 6 montre les énoncés pour chacun des critères.

Échelle	Énoncés de chacun des critères		
	Degrés de désirabilité	Variance	Coût
1	Équivalent	Équivalent	Équivalent
5	Plus satisfaisante	Plus petite	Moins cher
10	Bien plus satisfaisante	Bien plus petite	Bien moins cher
1/5	Moins satisfaisante	Plus grande	Plus cher
1/10	Bien moins satisfaisante	Bien plus grande	Bien plus cher

Tableau 6 : Échelle d'évaluation pour les critères

Les tableaux 7 à 9 montrent la comparaison des 5 solutions Pareto-optimales (S) en fonction de chacun des critères.

Critère 1						Total de la rangée	Valeur décimale relative
Désirabilité	S1	S2	S3	S4	S5		
S1		1/10	1/5	1/5	5	5.50	0.094
S2	10		5	5	10	30.00	0.512
S3	5	1/5		1	5	11.20	0.191
S4	5	1/5	1		5	11.20	0.191
S5	1/5	1/10	1/5	1/5		0.70	0.012
Total						58.60	100

Tableau 7 : Pondération des solutions Pareto-optimales (S) en fonction du critère de désirabilité

Critère 2						Total de la rangée	Valeur décimale relative
Variance	S1	S2	S3	S4	S5		
S1		5	10	10	5	30	0.485
S2	1/5		5	5	5	15.2	0.246
S3	1/10	1/5		1/5	1/5	0.7	0.011
S4	1/10	1/5	5		1/5	5.5	0.090
S5	1/5	1/5	5	5		10.4	0.168
Total						61.8	1.00

Tableau 8 : Pondération des solutions (S) en fonction du critère de variance

Critère 3						Total de la rangée	Valeur décimale relative
Coût	S1	S2	S3	S4	S5		
S1		1/5	1/10	1/10	1/10	0.5	0.009
S2	5		1/5	1/5	1/5	0.6	0.010
S3	10	5		5	5	25	0.427
S4	10	5	1/5		1	16.2	0.277
S5	10	5	1/5	1		16.2	0.277
Total						58.5	1.00

Tableau 9 : Pondération des solutions Pareto-optimales (S) en fonction du critère de coût

Maintenant, à l'aide d'une matrice résumée, il est possible de comparer chaque solution Pareto-optimale sur la base de tous les critères combinés. Dans chaque cellule de la matrice, multipliez la valeur relative de chaque solution

Pareto-optimale en fonction de chacun des critères (deuxième étape) par la valeur relative du critère (première étape). Le tableau 10 présente les résultats finaux.

Critères → Solutions ↓	Désirabilité (0.347)	Variance (0.063)	Coût (0.590)	Total de la rangée
S1	(0.094 x 0.347) 0.0326	(0.485 x 0.063) 0.0306	(0.009 x 0.59) 0.0053	0.0685
S2	(0.512 x 0.347) 0.1777	(0.246 x 0.063) 0.0155	(0.010 x 0.59) 0.0059	0.1991
S3	(0.191 x 0.347) 0.0663	(0.011 x 0.063) 0.0007	(0.427x 0.59) 0.2519	0.3189
S4	(0.191 x 0.347) 0.0663	(0.090 x 0.063) 0.0057	(0.277 x 0.59) 0.1634	0.2354
S5	(0.012 x 0.347) 0.0042	(0.168 x 0.063) 0.0106	(0.277 x 0.59) 0.1634	0.1782
Total				1.00

Tableau 10 : Matrice résumée

La solution ayant obtenue la valeur maximale est la solution Pareto-optimale à adopter. Pour cet exemple, la solution Pareto-optimale S3 serait retenue pour implantation car elle représente la meilleure option selon tous les critères considérés. La solution Pareto-optimale S4 obtient le deuxième rang. Si les critères avaient été considérés séparément, la solution Pareto-optimale 2 aurait été choisie car elle correspond le plus aux préférences des décideurs, la solution Pareto-optimale 1 aurait été choisie car elle est la plus robuste (cause le moins de variation) et la solution Pareto-optimale 3 aurait été choisie car elle est la moins dispendieuse. La méthode AHP empêche de prendre une décision finale biaisée.

5 CONCLUSION

L'exemple numérique a démontré l'application de la méthode AHP pour choisir une solution Pareto-optimale parmi un ensemble de solution. Cette méthode complète très bien l'algorithme IPOMP-ED pour les raisons suivantes : 1) elle permet de prendre en considération des critères qualitatifs (souvent impossible à modéliser par une fonction-objectif), 2) elle peut être utilisée pour résoudre des problèmes de grande taille (plusieurs critères) et 3) elle réduit les chances de sélectionner le « projet favori » d'un décideur (directeur ou groupe de travail). Cependant bien que cette méthode soit plus systématique qu'un processus de prise de décision traditionnel, il ne s'agit toutefois pas d'une science. Il faut utiliser son bon sens et sa capacité de jugement lorsque les solutions Pareto-optimales obtiennent des résultats très proches.

RÉFÉRENCES

Abdel Haleem, B., (1991), A study on interactive multiple criteria decision making problems, *Doctoral Thesis*, Mechanical Design And Production Department, Faculty of Engineering, Cairo University.

- Alidi, A.S. (1996), A multiobjective optimization model for the waste management of the petrochemical industry, *Appl. Math. Modelling*, Vol. 20.
- Baril, C., Yacout, S. and Clément, B. (2009) An Interactive Multi-Objective Algorithm for Decentralized Decision Making in Product Design, *Optimization and Engineering* (soumis).
- Baril, C., Yacout, S., Clément, B., (2007), Un algorithme interactif considérant les préférences des équipes de travail pour la résolution de problèmes à multiples objectifs en conception de produit, *7^{ème} Congrès International de Génie Industriel*, Trois-Rivières, Québec.
- Brassard M. and Ritter, D. (2001), *Le memory jogger: un guide de poche des outils pour une amélioration continue et une planification efficace*, GOAL/QPC, 164 pages.
- Chang, C-W, Wu, C-R, Lin, C-T and Chen, H-C. (2007), An application of AHP and sensitivity analysis for selecting the best slicing machine, *Computers and Industrial Engineering*, 52, pp.296-307.
- Chankong, V., Haimes, Y.Y., (1983), Multiobjective Decision Making : theory and methodology, Series Volume 8, *North-Holland series in system science and engineering*, Elsevier, 405 pages.
- Coello, C.A.C., VanVeldhuizen, D.A. and Lamour, G. (2002). *Evolutionary Algorithms for solving Multi-Objective Problems*. Boston, MA:Kluwer Academic Publishers.
- Deb, K., and Gupta, H. (2006). Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization. *Evolutionary Computation*, 14(4), 463-494.
- Diwekar, U., (2003), Introduction to applied optimization, *Applied Optimization*, Vol.80, Kluwer Academic Publishers, États-Unis, 335 pages.
- Gerdri, N. and Kocaoglu, D.F. (2007), Applying the analytic hierarchy process (AHP) to build a strategic framework for technology roadmapping, *Mathematical and Computer Modelling*, 46, pp. 1071-1080.
- Gong, W. and Cai, Z., (2009), An improved multiobjective differential evolution based on Pareto-adaptive e-dominance and orthogonal design, *European journal of operational research*, Vol. 198, 576-601.
- Gu, X.S., Renaud, J.E, and Penninger, C.L., 2006, "Implicit Uncertainty Propagation for Robust Collaborative Optimization" *Journal of Mechanical Design*, 128, pp. 1001-1013.
- Ho, W. (2008), Integrated analytic hierarchy process and its applications – A literature review, *European Journal of Operational Research*, 186, pp. 211-228.
- Lozano, S. and Villa, G. (2008), Multiobjective target setting in data envelopment analysis using AHP, *Computers and Operations Research*, (Article in press).
- Messac, A., 1996, "Physical Programming: Effective Optimization for Computational Design", *AIAA Journal*, 34(1).

- Miettinen, K., Makela, M., (2006), Synchronous approach in interactive multiobjective optimization, *European Journal of Operational Research*, Vol.170, pp.909-922.
- Mistree, F., Hughes, O.F., Bras, B., (1993), Compromise Decision Support Problem and the adaptive linear programming algorithm, *Structural Optimization : Status and Promise*, Vol.50, Progress in Astronautics and Aeronautics American Institute, Washington, USA, pp.251-290.
- Ozdemir, M.S. and Gasimov, R.N. (2004), the analytic hierarchy process and multiobjective 0-1 faculty course assignment, *European Journal of Operational Research*, 157, pp.398-408.
- Saaty T.L., (1980), *The Analytic Hierarchy Process*, New-York, McGraw-Hill.
- Salazar, D.E., Claudio, A. and Rocco, S., (2007), Solving advanced multi-objective robust design by means of multiple objective evolutionary algorithms (MOEA): a reliability application. *Reliability engineering and system safety*, Vol. 92, 697-706.
- Sinha, K., (2007), Reliability-based multiobjective optimization for automotive crashworthiness and occupant safety, *Structural Multidisciplinary Optimization*, 33, 255-268.
- Taboada, H.A., Baheranwala, F., Coit, D.W. and Wattanapongsakorn, N., (2007), Practical solutions for multi-objective optimization: an application to system reliability design problems, *Reliability engineering and system safety*, Vol. 92, 314-322.
- Tappeta, R.V., Renaud, J.E., (1999), Interactive Multiobjective Optimization Procedure, *AIAA Journal*, Vol.37, No.7.
- Topaloglu, S. (2006), A multi-objective model for scheduling emergency medicine residents, *Computers and Industrial Engineering*, 51, pp.375-388.
- Vaidya, O.S. and Kumar, S. (2006), Analytic hierarchy process: An overview of applications, *European Journal of Operational Research*, 169, pp.1-29.
- Vassilev, V., Narula, S.C., Gouljashki, V.G., (2001), An interactive reference direction algorithm for solving multi-objective convex nonlinear integer programming problems, *International Transactions in Operational Research*, Vol.8, No.4, pp.367-380.