

## SUR LA REGULATION DES SYSTEMES DE VELOS EN LIBRE-SERVICE APPROCHE BASEE SUR LES RESEAUX DE PETRI AVEC DES ARCS A POIDS VARIABLES

K. LABADI – T. BENARBIA – M. DARCHERIF

EPMI / ECS (ENSEA) - PRES Cergy University  
Institut Polytechnique Saint Louis - 11 Bld de l'Hautil  
95092 Cergy Pontoise Cedex France  
k.labadi@epmi.fr

**RESUME :** *Au cours de ces dernières années, des systèmes de vélos en libre-service fleurissent dans plusieurs villes en Europe (Vélib' à Paris, Vélov'v à Lyon, Bicing à Barcelone, etc.). Contrairement aux systèmes de transport traditionnels, très peu d'études fondamentales (voire aucune) ont été menées. Pourtant, de nombreuses questions émergent, la principale étant la question d'une régulation efficace. Le travail développé dans cet article est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre et l'exploitation des systèmes de vélos en libre-service. Nous développons un modèle dynamique pouvant prendre en compte toute la dimension du fonctionnement de ce type de systèmes. Notre approche repose sur les réseaux de Petri (avec des poids sur les arcs variables en fonction du marquage actuel) pertinents aussi bien pour l'analyse que pour la simulation. A notre connaissance, il s'agit d'un premier travail du genre dans la littérature sur les réseaux de Petri et plus généralement sur la régulation des systèmes de vélos en libre-service.*

**MOTS-CLES :** *systèmes de vélos en libre-service, régulation, réseaux de Petri.*

### 1 INTRODUCTION A LA PROBLEMATIQUE

L'écologie et le développement durable stimule l'innovation dans les transports. Au cours de ces dernières années, des systèmes de vélos en libre-service fleurissent en Europe (Vélib' à Paris, Vélov'v à Lyon, Bicing à Barcelone, etc.). L'urgence de la question environnementale et leurs avantages en termes de développement durable sont tels qu'en de nombreuses villes, il est envisagé de mettre en place des systèmes similaires pour d'autres moyens de transports tels que les voitures et les utilitaires. Contrairement aux systèmes de transport traditionnels, peu d'études fondamentales (voire aucune) sur la mise en œuvre et l'exploitation de ces systèmes de transport en libre-service ont été menées. Pourtant, de nombreuses questions émergent, la principale étant la question d'une régulation efficace. D'autres questions telles que la taille des stations, le dimensionnement de la flotte de véhicules, la localisation des stations sont également considérables.

Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons au problème de régulation. Cette fonction peut se faire par des véhicules à remorque transportant des vélos d'une station à une autre. La régulation consiste pour l'exploitant à maintenir un nombre minimal de vélos par station pour permettre la prise de vélos par les usagers, ainsi qu'un nombre maximal inférieur à la capacité de la station pour permettre la dépose de vélos par les usagers. Afin d'appréhender la réalité du terrain de cette fonction, un excellent entretien avec les responsables de la régulation de Vélib' (Paris) est disponible sur le site internet :

<http://blog.velib.paris.fr/blog/reportages/entretien-avec-les-responsables-de-la-regulation-velib-episode-2/>.

Comme extrait de cet entretien, nous reprenons deux réponses à deux intéressantes questions :

- Comment définiriez-vous le rôle de la régulation ?  
« Très simplement : prendre des vélos là où il y en a trop pour les emmener là où il n'y en a pas assez. Dans un modèle théorique et parfait, chaque station devrait être remplie à 50 % de Vélib', laissant ainsi une moitié de bornes vides pour accueillir de nouveaux vélos. La réalité est bien sûr plus complexe ».
- Quels sont vos objectifs chaque jour ? « Nous avons trois priorités. Tout d'abord, éviter les stations pleines, car nous savons que pour les usagers il n'y a rien de plus inconfortable que de se retrouver avec un vélo sur les bras. Puis, éviter les stations vides. Et enfin, parvenir à équilibrer vélos et places vides entre les différentes stations au niveau d'un quartier ».

Le travail développé dans cet article est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre, l'exploitation et la régulation des systèmes de vélos en libre-service. Nous proposons un modèle dynamique complet pouvant prendre en compte toute la dimension du fonctionnement de ce type de réseaux de transport. Ce travail repose sur les réseaux de Petri (à poids sur les arcs variables) pertinents aussi bien pour l'analyse que pour la simulation. A notre connaissance, il s'agit d'un premier travail dans la littérature portant sur la régulation des systèmes de vélos en libre-service à l'aide d'une approche basée sur les réseaux de Petri.

Après avoir introduit la problématique que nous traitons dans cet article, le reste de ce travail s'organise autour de trois principales sections :

- La deuxième section est une discussion sur le choix des réseaux de Petri comme outil de modélisation et d'analyse de ces systèmes et nous donnons, par la même occasion, quelques concepts de base de cet outil de modélisation.
- La troisième section est dédiée au cœur du sujet où nous développons un modèle RdP permettant de reproduire finement le fonctionnement de cette classe de systèmes tout en s'attachant plus particulièrement au problème de régulation.
- La quatrième partie est dédiée à la validation du modèle. Nous utilisons un outil de simulation que nous avons développé pour simuler des réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables en fonction du marquage actuel du réseau.

Enfin, ce travail sera conclu par un ensemble de perspectives visant l'exploitation du modèle sur un cas concret.

## 2 CHOIX DES RESEAUX DE PETRI COMME OUTIL DE MODELISATION

Les réseaux de Petri sont aujourd'hui l'un des outils de modélisation et d'évaluation de performances les plus puissants et les plus étudiés dans la littérature (Murata, 1989), (David et Alla, 1992). Leur formalisme à la fois graphique et mathématique permet de modéliser finement divers phénomènes notamment la synchronisation, le parallélisme, le partage de ressources ou encore des situations de conflits. Ce sont, sans doute, des exemples parmi les nombreux phénomènes caractérisant la dynamique des systèmes de transport d'une manière générale.

Les principales applications des réseaux de Petri dans le domaine du transport se sont focalisées sur la régulation des feux de trafic (Jensen, 1992)-(Di Cesare et al. 1994)-(Gallego et al., 1996)-(Wang et al., 1999)- Di Febrarro et al., 2004)-(Tolba et al. 2008). Néanmoins, ils sont également utilisés avec succès pour la modélisation, l'analyse, l'évaluation et/ou l'optimisation des systèmes de transport urbains (Castelain et Mesghouni 2002)-(Bouyekhf et al., 2003)-(Abbas-Turki, 2003)-(Nait-Sidi-Moh, 2003).

Certes, ces travaux de recherche montrent la pertinence du choix des réseaux de Petri pour l'étude de cette classe de systèmes, mais dans le cadre de ce travail, nous traitons un autre type de transport dont l'organisation et la régulation s'avèrent plus complexe à cause du mode de fonctionnement en libre-service. Contrairement aux systèmes de transport traditionnels, peu d'études fondamentales (voire aucune) sur la mise en œuvre et l'exploitation des systèmes de transport en libre-service ont été menées. Plus particulièrement, à notre connaissance, il n'existe aucune étude qui repose sur les réseaux de Petri comme un outil de modélisation et d'analyse des systèmes de vélos en libre-service.

### 2.1 Définitions et concepts de base des RdP

Le grand intérêt scientifique des réseaux de Petri a conduit au développement de plusieurs variantes comme : les réseaux de Petri temporisés, les réseaux de Petri stochastiques, les réseaux de Petri continus, ou encore les réseaux de Petri hybrides. Pour la suite de ce travail, nous supposons le lecteur est familier du fonctionnement et des propriétés de base des Réseaux de Petri (Murata, 1989), (David et Alla, 1992).

Un réseau de Petri à arcs inhibiteurs est un graphe orienté biparti dont les nœuds sont des places et des transitions. On peut le définir comme un 6-uplets :

$$PN = (P, T, Pré, Post, Inhib, M)$$

où :

- $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  est l'ensemble fini non vide des places du réseau.
- $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  est l'ensemble fini non vide des transitions du réseau.
- $Pré : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application d'incidence avant qui définit les poids des arcs reliant les places aux transitions.
- $Post : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application d'incidence arrière qui définit les poids des arcs reliant les transitions aux places.
- $Inhib : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application qui définit les poids des arcs inhibiteurs reliant les places aux transitions.
- $M : (P \times T) \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction de marquage donnant la distribution des jetons dans les places. On note par  $M_0$  le marquage initial du réseau.

Notations :  $\mathbb{N}$  représente l'ensemble des nombres entiers. Les matrices  $Pré$  et  $Post$  sont des matrices  $n \times m$ .  $Pré(P_i, T_j)$  est le poids de l'arc reliant la place  $P_i$  à la transition  $T_j$ .  $Post(P_i, T_j)$  est le poids de l'arc reliant la transition  $T_j$  à la place  $P_i$ .  $Inhib(P_i, T_j)$  est le poids de l'arc inhibiteur entre une place  $P_i$  et une transition  $T_j$ . Du point de vue graphique, les places sont représentées par des cercles, les transitions par des barres ou des rectangles. Les arcs ( $Pré$  et  $Post$ ) qui relient les places aux transitions et vice versa sont des arcs orientés pondérés. Les arcs inhibiteurs sont représentés par des arcs avec un petit cercle à l'extrémité. On note par  $\bullet T_j$  (resp.  $T_j^\circ$ ) l'ensemble des places d'entrée de la transition  $T_j$ , (resp. l'ensemble des places de sortie de la transition  $T_j$ ) et par  $\mathcal{T}_j$  l'ensemble des places d'entrée reliées à  $T_j$  par des arcs inhibiteurs.

Une transition  $T_j$  est franchissable (validée) pour un marquage  $M$  si et seulement si :

$$\forall P_i \in \bullet T_j, M(P_i) \geq Pré(P_i, T_j) \quad (1)$$

$$\forall P_i \in \circ T_j, M(P_i) < Inhib(P_i, T_j) \quad (2)$$

Le franchissement d'une transition  $T_j$  validée consiste à

retirer  $\text{Pré}(P_i, T_j)$  jetons de chaque place  $P_i \in {}^{\bullet}T_j$  et à ajouter  $\text{Post}(P_i, T_j)$  jetons dans chaque place  $P_i \in T_j^{\bullet}$ . Ainsi, à partir du marquage  $M$ , le franchissement de la transition  $T_j$  conduit à un nouveau marquage  $M'$  défini comme suit :

$$\forall P_i \in P, M'(P_i) = M(P_i) - \text{Pré}(P_i, T_j) + \text{Post}(P_i, T_j) \quad (3)$$

## 2.2 Nécessité du concept de poids sur les arcs variables en fonction du marquage actuel du réseau

Pour pouvoir exprimer le fonctionnement des systèmes de transport en libre-service notamment leur système de régulation, le concept de « *poids sur les arcs variables en fonction du marquage actuel du réseau* » est nécessaire. Ce concept est déjà introduit pour la modélisation des systèmes de gestion de stocks et des chaînes logistiques en général dans les travaux de (labadi et al., 2007). A titre d'exemple, dans un système de stockage, la quantité de produits qu'il faut commander pour réapprovisionner un stock dépend du niveau du stock courant (inventaire) et des commandes des clients reçues. Pour pouvoir modéliser ce genre de situations ou en d'autres termes, afin de déclencher des activités en fonction de l'état actuel du système, il a fallu introduire dans le modèle ce concept de « *poids sur les arcs variables en fonction du marquage courant* ».

Dans le cadre de cet article, nous verrons que ce concept est très utile pour la modélisation notamment de la fonction de régulation puisqu'elle dépend du nombre de vélos disponibles dans chaque station au moment du contrôle. Autrement dit, le nombre de vélos à ajouter ou à retirer dans une station donnée n'est pas toujours le même. Il varie en fonction du nombre de vélos actuel dans cette station. Ainsi, les poids des arcs du modèle RdP utilisé dans ce travail peuvent être variables en fonction du marquage courant du réseau. Le poids  $w(i, j)$  de chaque arc  $(i, j)$  peut être défini comme une fonction linéaire en fonction du marquage courant du réseau. Formellement,  $w(i, j)$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$w(i, j) = \alpha_{ij} + \sum_{P_i \in P} (\beta_{ij})_{P_i} \cdot M(P_i) \quad (4)$$

Les coefficients  $\alpha$   $\beta$  sont des entiers (pouvant être nuls). On assume que cette fonction affecte des valeurs positives au poids de chaque arc  $(i, j)$  à chaque instant où la transition reliée à cet arc est **validée**.

A titre d'exemple, dans le RdP de la figure 1, on voit que les poids des deux arcs  $\text{Post}(PR_1, TR_1)$  et  $\text{Pré}(TR_1, PS_1)$  reliant  $PR_1$  à  $TR_1$  et  $TR_1$  à  $PS_1$  dans cet ordre dépendent du marquage actuel de la place  $PS_1$  noté par  $M(PS_1)$ .

Pour le marquage initial du réseau,  $M_i = (2, 5)^T$ , la transition  $TR_1$  est franchissable puisque :

$$M(PR_1) = 5 \geq \text{Post}(PR_1, TR_1) = 4 - M(PS_1) = 2$$

$$M(PS_1) = 2 < \text{Inhib}(PS_1, TR_1) = 4$$

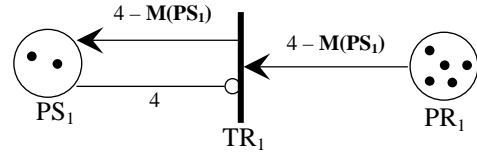


Figure 1. Exemple d'illustration d'un RdP avec des poids sur les arcs variables en fonction du marquage.

Le franchissement de la transition  $TR_1$  à partir du marquage initial  $M_i$  conduit à un nouveau marquage  $M_f = (4, 3)^T$  puisque que :

$$M_f(PS_1) = M_i(PS_1) + [4 - M_i(PS_1)] = 2 + [4 - 2] = 4.$$

$$M_f(PR_1) = M_i(PR_1) - [4 - M_i(PS_1)] = 5 - [4 - 2] = 3.$$

## 3 MODELISATION D'UN SYSTEME DE VELOS EN LIBRE-SERVICE

Cette section est dédiée au développement d'un modèle dynamique d'un système de vélos en libre-service. Un modèle RdP sera présenté d'une façon modulaire afin de comprendre la dynamique du système au travers des différentes fonctions qu'il réalise notamment la fonction de régulation des stations.

### 3.1 Description du système à modéliser

Un système de vélos en libre-service est un réseau de transport composé d'un ensemble de  $N$  stations noté par  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ . Chaque station  $S_i \in S$  est équipée d'un nombre limité, noté  $C_i$ , de points d'attache de vélos déterminé en fonction de l'environnement de la station et de sa fréquentation estimée. C'est un système de location en libre service disponible 24h/24. Les stations sont constituées d'une borne permettant notamment la location de vélos. Elles sont distantes de quelques centaines de mètres (300 mètres environ pour Vélib' Paris). Pour faire son trajet, chaque usager prend un vélo dans une station et le dépose dans une autre. Afin, de parvenir à équilibrer vélos et places vides entre les différentes stations, un système de régulation est nécessaire. La régulation se fait par des agents de régulation qui visitent les différentes stations. Ils utilisent des véhicules tractant une remorque chargée de vélos. Le principe général de la régulation du système consiste pour l'exploitant à maintenir un nombre minimal, noté  $R_i$ , de vélos par station  $S_i$  pour permettre la prise de vélos par les usagers, laissant ainsi un certain nombre  $(C_i - R_i)$  de bornes vides pour accueillir de nouveaux vélos.

### 3.2 Développement d'un modèle RdP en vue de la régulation du système

Après la description fonctionnelle du système de vélos en libre-service, nous avons développé un modèle dyna-

mique qui intègre le système de régulation. Pour des raisons de clarté, nous nous sommes contentés de représenter, par la figure 2, le modèle pour un réseau à trois stations. La généralisation à  $N$  stations sera discutée dans la section qui suivra. Elle peut se faire systématiquement en fonction de trois principaux modules qui seront définis dans la suite de cette section.

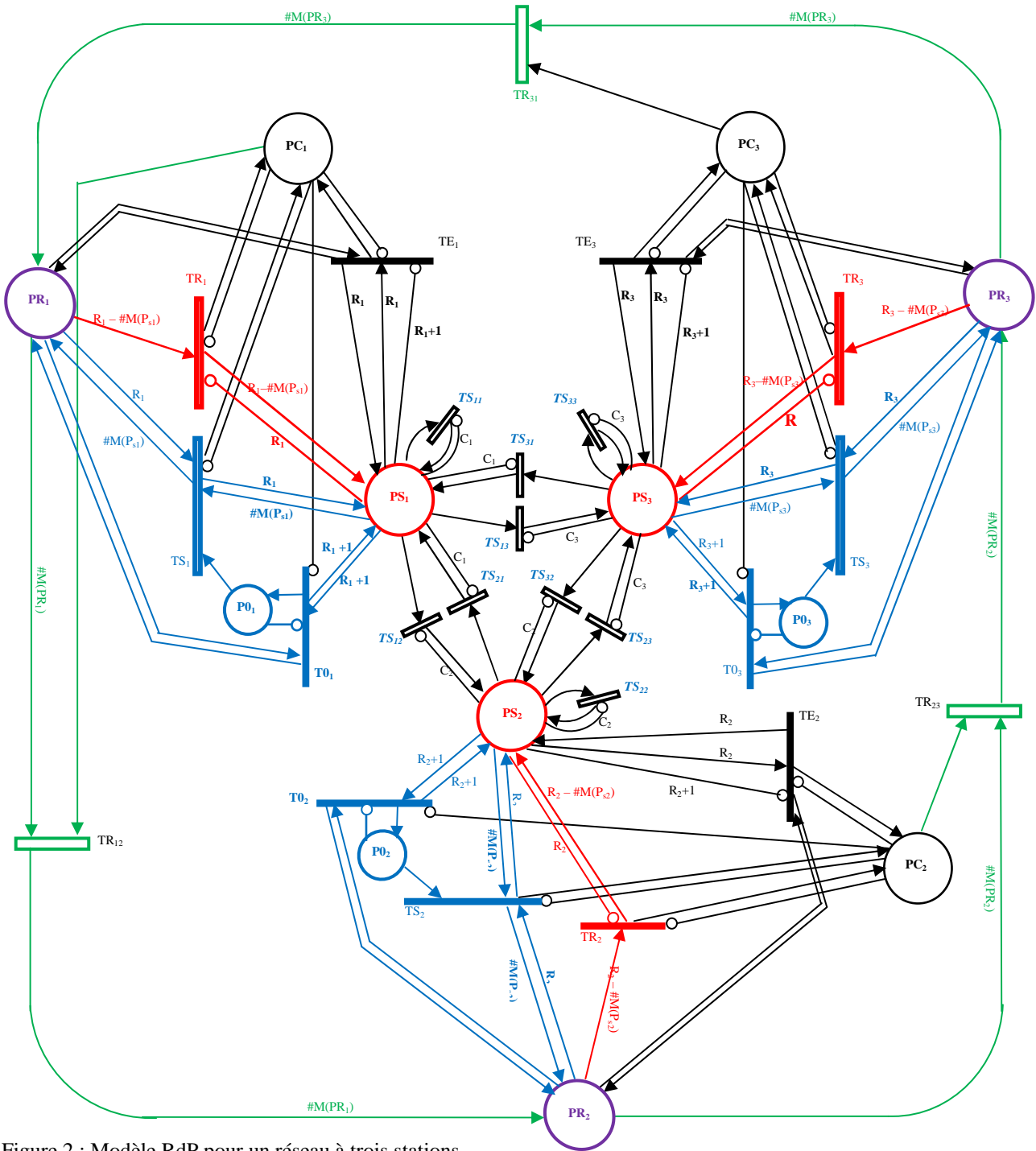


Figure 2 : Modèle RdP pour un réseau à trois stations

Le tableau 1, ci-dessous, fournit la désignation de l'ensemble des places, des transitions et des paramètres du modèle RdP.

Désignation des places, des transitions et paramètres du modèle RdP	
$PS_i$	Représente une station $S_i$ . Son marquage $M(PS_i)$ correspond au nombre de vélos disponibles dans la station $S_i$ .
$PR_i$	Représente la voiture à remorque utilisée pour la régulation. Le marquage $M(PR_i)$ correspond au nombre de vélos disponibles dans ce véhicule au moment de la visite d'une station $S_i$ .
$PO_i$	Permet d'indiquer si le nombre de vélos dans une station $S_i$ est supérieur au seuil de régulation $R_i$ .
$PC_i$	Permet d'indiquer si le contrôle de régulation d'une station $S_i$ est terminé lors de la visite du véhicule de régulation : - $M(PC_i) = 1$ signifie que le contrôle de régulation est terminé et le déplacement du véhicule de régulation vers une autre station voisine est en cours. - $M(PC_i) = 0$ (et $M(PR_i) \neq 0$ ) signifie que le contrôle et/ou la régulation est en cours pour la station $S_i$ .
$TR_i$	Permet de tester et de rajouter (si nécessaire) des vélos dans une station $S_i$ .
$TO_i$	Permet de tester si le nombre de vélos dans une station $S_i$ est supérieur au seuil de régulation $R_i$ .
$TS_i$	Permet la suppression de vélos dans une station $S_i$ si nécessaire (si le nombre de vélos dans $S_i$ est supérieur à $R_i$ )
$TE_i$	Permet de tester si le nombre de vélos dans une station $S_i$ est égal au seuil de régulation $R_i$
$R_i$	Seuil de régulation appliqué au niveau d'une station $S_i$ .
$C_i$	Capacité d'une station $S_i$ en nombre de vélos qu'elle peut contenir (correspond au nombre de points d'attache de vélos dans $S_i$ ).

**Tableau 1** : Désignation des places et des transitions

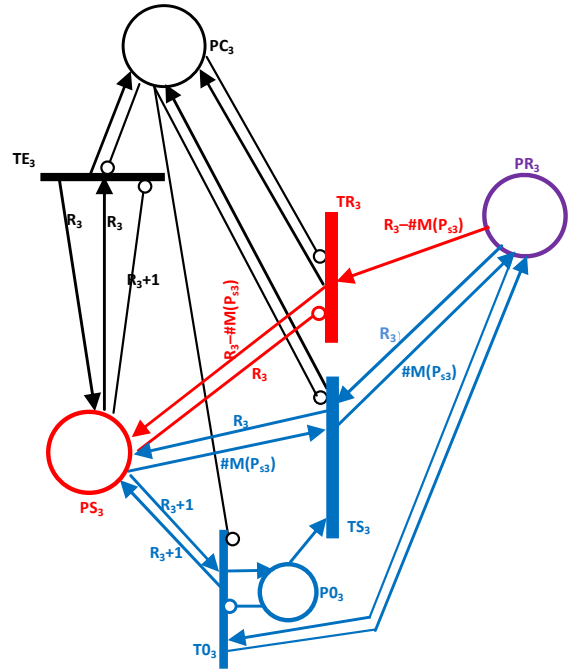
Bien évidemment, le tableau 1 et la figure 2 seuls ne suffisent pas pour comprendre le fonctionnement du modèle développé. Ainsi, comme on peut le constater sur ce modèle, trois principaux modules peuvent être identifiés dont la fonction est spécifique à chaque module. En effet, le modèle global est composé de l'ensemble des modules suivants :

- Module représentant la régulation de chaque station  $S_i$ .
- Module représentant les déplacements des vélos d'une station à une autre dus aux retraits et aux dépôts de vélos effectués par les usagers.
- Module représentant le déplacement du véhicule d'une station à une autre pour un contrôle de régulation.

### 3.3 Description du module de régulation d'une station $S_i$

Le module permettant de réaliser la fonction de régulation d'une station  $S_i$  est représenté par la figure 3.

On peut voir la duplication de ce module sur le système global (figure 2) au niveau de chaque station  $S_i$ .


**Figure 3** : Module de régulation d'une station  $S_i$  (ici  $i=3$ )

Ce module de régulation est constitué de l'ensemble des places  $PS_i$ ,  $PC_i$ ,  $PR_i$ ; de l'ensemble des transitions  $TE_i$ ,  $TR_i$ ,  $TS_i$ ,  $TO_i$  et bien sûr de l'ensemble des arcs reliant ces deux ensembles. Comme indiqué dans le tableau 1, la place  $PS_i$  représente une station  $S_i$ ; la place  $PR_i$  représente le véhicule de régulation visitant la station  $S_i$  et la place  $PC_i$  permet d'indiquer l'état du contrôle (en cours ou terminé) de la station  $S_i$ . Ce module permet de réaliser trois principales fonctions décrites ci-dessous :

#### 3.3.1 Fonction d'ajout de vélos dans la station si nécessaire

Cette fonction est assurée à l'aide de la transition  $TR_i$  reliée, à l'aide d'un ensemble d'arcs, à la place  $PR_i$  et à la place  $PS_i$ . En effet, la transition  $TR_i$  permet de tester et de rajouter (si nécessaire) des vélos dans la station  $S_i$  ;

- La validation de la transition  $TR_i$  consiste à contrôler s'il est nécessaire de rajouter des vélos dans la station  $S_i$ . Elle est franchissable si et seulement si :

$$M(PS_i) < Inhib(PS_i, TR_i) = R_i. \quad (5)$$

Ce qui signifie que le nombre de vélos dans la station  $S_i$  doit être au dessous du seuil de régulation fixé à  $R_i$ .

$$M(PC_i) < Inhib(PC_i, TR_i) = 1. \quad (6)$$

Cette condition est équivalente à  $M(PC_i) = 0$  (puisque le marquage est toujours positif). Elle signifie que le contrôle de régulation est en cours.

$$M(PR_i) \geq Post(PR_i, TR_i) = R_i - M(PS_i). \quad (7)$$

Ce qui impose la disponibilité dans le véhicule de régulation d'un nombre de vélos suffisant pour pouvoir ramener le nombre de vélos dans la station  $S_i$  à  $R_i$  (autrement dit le marquage de la place  $PS_i$  à  $R_i$ ).

- Une fois la transition  $TR_i$  est validée, son franchissement consiste à re-compléter à  $R_i$  le nombre de vélos de la station  $S_i$ . Ainsi, le marquage va évoluer comme suit :

$$\begin{aligned} M'(PR_i) &= M(PR_i) - \text{Pré}(PR_i, TR_i) \\ &= M(PR_i) - [R_i - M(PS_i)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Ceci consiste à retirer  $R_i - M(PS_i)$  jetons dans la place  $PR_i$  (retrait de vélos dans le véhicule de régulation).

$$\begin{aligned} M'(PS_i) &= M(PS_i) + \text{Post}(PS_i, TR_i) \\ &= M(PS_i) + [R_i - M(PS_i)] = R_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Ceci consiste à ajouter  $R_i - M(PS_i)$  jetons dans la place  $PS_i$  (ceci revient à ramener le nombre de vélos dans la station  $S_i$  à  $R_i$  vélos).

### 3.3.2 Fonction de retrait de vélos dans la station si nécessaire

Cette fonction est assurée au moyen des transitions  $TO_i$  et la transition  $TS_i$ . Plus exactement, la transition  $TO_i$  permet d'effectuer le test « si le nombre de vélos dans  $S_i$  est supérieur à  $R_i$  » et la transition  $TS_i$  est chargé du retrait de vélos (superflu).

- La validation de la transition  $TO_i$  consiste à contrôler s'il faut retirer des vélos dans la station  $S_i$ . Elle est franchissable si et seulement si :

$$M(PS_i) \geq \text{Pré}(PS_i, TO_i) = (R_i + 1). \quad (10)$$

Ce qui signifie que le nombre de vélos dans la station  $S_i$  doit être au dessus du seuil de régulation fixé à  $R_i$ .

$$M(PR_i) \geq \text{Pré}(PR_i, TO_i) = 1. \quad (11)$$

Ce qui permet de conditionner ce test à se faire uniquement lorsque le véhicule de régulation est arrivée à la station  $S_i$ . Ceci est vrai lorsqu'on a  $M(PR_i) \neq 0$ , autrement dit lorsqu'on a au moins  $M(PR_i) = 1$ .

$$M(PO_i) < \text{Inhib}(PO_i, TO_i) = 1. \quad (12)$$

Ce qui permet de vérifier que ce test n'a pas encore été effectué pour cette station  $S_i$ .

Le franchissement de la transition  $TO_i$  consiste à déposer un jeton témoin dans la place  $PO_i$  qui permettra la validation de la transition  $TS_i$  pour le retrait du superflu. Le franchissement de la transition  $TO_i$  fait évoluer le marquage des places concernées comme suit :

$$M'(PO_i) = M(PO_i) + \text{Post}(PO_i, TO_i) = 1. \quad (13)$$

A noter qu'initialement  $M(PO_i) = 0$  (vu les conditions de franchissement de  $TO_i$ ). Les autres arcs formant les deux boucles ( $PS_i, TO_i$ ) et ( $TO_i, PR_i$ ) n'ont aucune incidence sur le marquage des places  $PS_i$  et  $PR_i$ . En réalité, elles ont servi uniquement pour exprimer les deux conditions de franchissement  $M(PR_i) \geq 1$  et  $M(PO_i) < 1$  de la transition  $TO_i$ .

- Pour valider le franchissement de la transition  $TS_i$  (rajout de vélos dans  $S_i$ ), il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$M(PO_i) \geq \text{Pré}(PO_i, TS_i) = 1. \quad (14)$$

Elle consiste à vérifier le résultat du test précédant concernant le nombre de vélos dans la station  $S_i$  à l'aide du marquage témoin de la place  $PO_i$ .

$$M(PR_i) \geq \text{Pré}(PR_i, TS_i) = R_i. \quad (15)$$

Cette condition signifie la disponibilité d'un nombre de vélos suffisant pour pouvoir ramener le nombre de vélos dans la station  $S_i$  à  $R_i$ .

$$M(PS_i) \geq \text{Pré}(PS_i, TS_i) = M(PS_i). \quad (16)$$

Cette condition est toujours vraie. Elle correspond au poids de l'arc ( $PS_i, TS_i$ ) utilisé pour pouvoir ramener le marquage de  $PS_i$  à  $R_i$  à l'aide de l'arc entrant ( $TS_i, PS_i$ ) de poids égal à  $R_i$ .

- Le franchissement de la transition  $TS_i$  permet de réaliser la fonction attendue. Elle s'agit de retirer un certain nombre de vélos dans la station  $S_i$  afin de ramener ce nombre à  $R_i$  vélos. En termes du réseau de Petri, le franchissement de la transition  $TS_i$  consiste à :

$$\begin{aligned} M'(PS_i) &= M(PS_i) + \text{Post}(PS_i, TS_i) - \text{Pré}(PS_i, TS_i) \\ &= M(PS_i) + R_i - M(PS_i) = R_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Ceci revient à ramener le marquage de la place  $PS_i$  (station  $S_i$ ) à  $R_i$  jetons (vélos).

$$\begin{aligned} M'(PR_i) &= M(PR_i) - \text{Pré}(PR_i, TS_i) + \text{Post}(PR_i, TS_i) \\ &= M(PR_i) - R_i + M(PS_i). \end{aligned} \quad (18)$$

Ce qui signifie que le superflu de jetons ( $M(PS_i) - R_i$ ) est remis dans la place  $PR_i$  (véhicule de régulation).

### 3.3.3 Fonction « ni ajout/ni retrait de vélos dans la station »

Cette fonction se réalise dans le cas où le contrôle de régulation indique que le nombre de vélos correspond exactement au seuil de régulation fixé à  $R_i$ . Autrement

dit lorsque, le  $M(PS_i) = R_i$ . Cette fonction se réalise à l'aide de la transition  $TE_i$  reliant la place  $PS_i$  et  $PC_i$  avec l'ensemble des arcs associés.

- En termes du réseau de Petri, la transition  $TE_i$  est franchissable si et seulement si :

$$M(PS_i) \geq \text{Pré}(PS_i, TE_i) = R_i \text{ et} \quad (19)$$

$$M(PS_i) < \text{Inhib}(PS_i, TE_i) = R_i + 1 \quad (20)$$

Ces deux conditions sont équivalentes à la condition que  $M(PS_i) = R_i$ .

$$M(PC_i) < \text{Inhib}(PC_i, TE_i) = 1 \quad (21)$$

Autrement dit  $M(PC_i) = 0$  qui signifie que le contrôle de régulation est en cours (n'a pas encore eu lieu).

- Contrairement aux franchissements des transitions  $TS_i$  et  $TR_i$  (retrait et rajouts de vélos dans  $S_i$ ), le franchissement de la transition  $TE_i$  va permettre uniquement d'indiquer que la visite de la station  $S_i$  est terminée pour libérer le véhicule à aller vers une autre station. Ainsi le franchissement de la transition  $TE_i$  conduit au marquage suivant :

$$\begin{aligned} M'(PC_i) &= M(PC_i) + \text{Post}(TE_i, PC_i) \\ &= M(PC_i) + 1 = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

(A noter qu'initialement  $M(PC_i) = 0$  vu les conditions de validation de  $TE_i$ ). Ce marquage indique que le contrôle de régulation est terminé et que le véhicule de régulation est libéré pour aller effectuer la visite d'une autre station voisine.

$$\begin{aligned} M'(PS_i) &= M(PS_i) + \text{Post}(PS_i, TE_i) - \text{Pré}(PS_i, TE_i) \\ &= M(PS_i) + R_i - R_i = M(PS_i). \end{aligned} \quad (23)$$

Ce qui signifie qu'il n'y a pas d'incidence sur le marquage de la place  $PS_i$ . Les arcs pondérés liant la place  $PS_i$  et la transition  $TE_i$  ont servi comme un moyen de test (conditions de franchissement).

### 3.3.4 Exemples d'illustration du fonctionnement du module de régulation

Dans tous les deux exemples ci-dessous, on considère que le seuil de la régulation  $R_i$  est fixé à 10.

- EXEMPLE 1.** — Nombre de vélos disponibles dans la station  $S_i$  est inférieur à  $R_i$  ( $M(PS_i) < R_i$ ).

A l'état actuel du réseau, on voit clairement que la station représentée par la place  $PS_3$  a un nombre de vélos inférieur au seuil de régulation  $R_3$  fixé ici à 10. A partir du réseau de Petri, on peut voir que la seule transition franchissable est  $TR_3$  puisque les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} M(PS_3) &= 7 < 10 ; & M(PR_3) &= 15 \geq 10 - M(PS_3) = 3 ; \\ M(PC_3) &= 0 < 1. \end{aligned}$$

Après le franchissement de la transition  $TR_3$ , le nouveau marquage  $M'$  du réseau de Petri est comme suit :

$$M'(PS_3) = M(PS_3) + [10 - M(PS_3)] = 7 + (10 - 7) = 10.$$

$$M'(PR_3) = M(PR_3) - [10 - M(PS_3)] = 15 - (10 - 7) = 12.$$

$$M'(PC_3) = M(PC_3) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

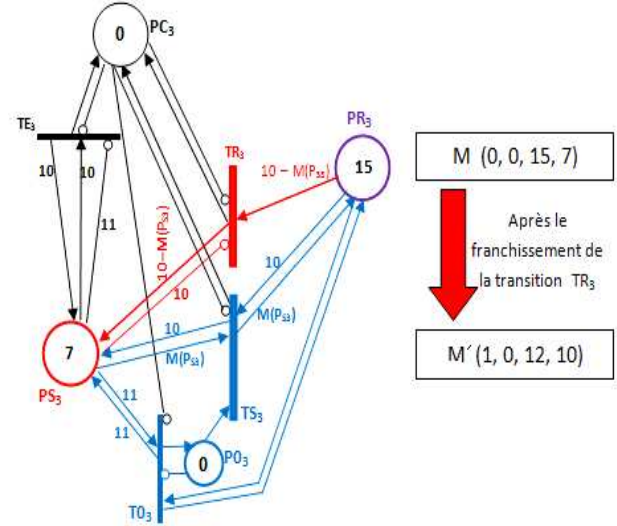


Figure 4 : Exemple de fonctionnement du module de régulation (cas où  $M(PS_i) < R_i$ ).

- EXEMPLE 2.** — Nombre de vélos disponibles dans la station  $S_i$  est supérieur à  $R_i$  ( $M(PS_i) > R_i$ ).

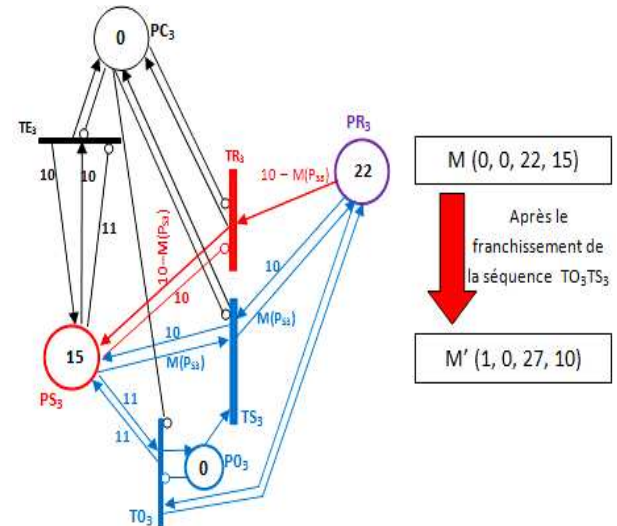


Figure 5 : Exemple de fonctionnement du module de régulation (cas où  $M(PS_i) > R_i$ ).

Dans ce cas, la seule transition validée est  $TO_3$  puisque :  $M(PS_3) = 15 \geq 11$  ;  $M(PO_3) = 0 < 1$  ;  $M(PC_3) = 0 < 1$ .

Le franchissement de la transition  $TO_3$  ramène le marquage de la place  $PO_3$  à 1, c.à.d :

$$M'(PO_3) = M(PO_3) + 1 = 1$$

Ce nouveau marquage, valide la transition  $TS_3$  puisque :  
 $M(PS_3) = 15 \geq 15$  ;  $M(PO_3) = 1 \geq 1$  ;  $M(PC_3) = 0 < 1$  ;  
 $M(PR_3) = 22 \geq 10$ .

Après le franchissement de la transition  $TR_3$ , le nouveau marquage du réseau est comme suit :

$M'(PS_3) = M(PS_3) + [10 - M(PS_3)] = 10$ . (Le nombre de vélos dans la station  $S_3$  passe à 10).

$M'(PR_3) = M(PR_3) - 10 + M(PS_3) = 22 - 10 + 15 = 27$ .

(Le nombre de vélos dans le véhicule de régulation passe à 27 dû à ceux retirés de la station).

$M'(PC_3) = M(PC_3) + 1 = 1$ . (Ce qui indique que le contrôle de la station  $S_3$  est terminé et que le véhicule de régulation peut effectuer son déplacement vers une autre station).

$M'(PO_3) = M(PO_3) - 1 = 0$ . Ceci est une réinitialisation du marquage de la place témoin du test que le marquage de  $PS_3$  était supérieur à  $R_3$ .

- A l'aide de ces deux exemples, on voit clairement que le modèle de régulation est conforme au fonctionnement recherché. Il permet le contrôle du nombre de vélos disponibles dans une station  $S_i$  et ainsi la redistribution des vélos en fonction du paramètre  $R_i$  choisi pour la régulation de cette station.

### 3.3.5 Temporisations à associer aux transitions du module de régulation

Nous rappelons que le module de régulation est composé de quatre transitions à savoir :  $TE_i$  ;  $TR_i$  ;  $TS_i$  et  $TO_i$ . Chaque transition modélise une opération donnée dont le délai opératoire (d'exécution) doit être exprimé par la temporisation à associer à la transition correspondante.

- Les transitions  $TE_i$  et  $TO_i$  peuvent être considérées comme des transitions immédiates (zéro délai). La transition  $TE_i$  est franchie pour le cas où le nombre de vélos dans la station  $S_i$  est égal au seuil de régulation  $R_i$ . Dans ce cas, il n'y a pas de rajout ou de retrait de vélos, donc aucun délai opératoire à prévoir pour le franchissement de cette transition. Pour ce qui est de la transition  $TO_i$  qui représente le test « si  $M(PS_i) > R_i$  ». On peut estimer que ce test s'effectue sans délai opératoire. De plus cette transition joue un rôle dans la fonction de rajout des vélos et le délai opératoire de cette opération sera considéré avec la transition  $TS_i$ .
- Des temporisations de type stochastique doivent être associées aux transitions  $TS_i$  et  $TR_i$  pour exprimer les délais opératoires des opérations de retrait et de rajout de vélos dans la station  $S_i$ . Ces temporisations sont stochastiques car le nombre de vélos à rajouter ou à soustraire n'est pas déterministe. Il varie à chaque contrôle de régulation en fonction de l'état actuel de la station contrôlée.

REMARQUE. — Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a pas de conflit de franchissement entre les trois transitions  $TS_i$ ,  $TR_i$  et  $TE_i$  du module de régulation. En effet, les conditions de franchissement des trois transitions

notamment  $M(PS_i) > R_i$  ;  $M(PS_i) < R_i$  ; et  $M(PS_i) = R_i$  sont strictement exclusives.

### 3.4 Description du module de déplacement de vélos par les usagers

Le module RdP de la figure 6 modélise les déplacements des vélos d'une station à une autre dus aux retraits et aux dépôts effectués par les usagers. En effet, pour faire son trajet, chaque usager prend un vélo dans une station et le dépose dans une autre (pouvant être la même !). La modélisation est faite à l'aide d'un RdP « complet » dont le sens où toutes les places sont reliées entre elles dans les deux sens à l'aide d'un ensemble de transitions notées  $TS_{ij}$  et des arcs correspondants.

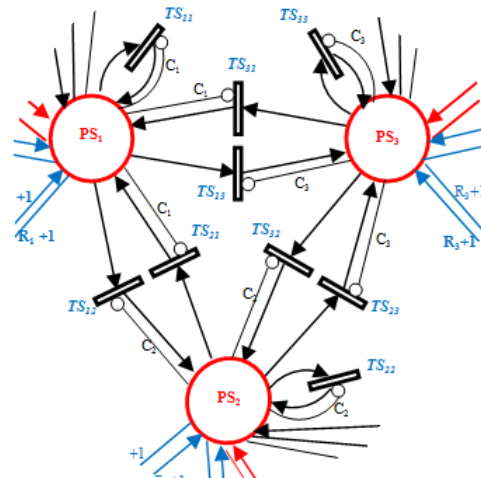


Figure 6 : Module représentant les déplacements des vélos d'une station à une autre dus aux retraits et dépôts effectués par les usagers.

- Chaque station  $S_i$  du réseau de transport est modélisée par une place notée par  $PS_i$ . Le nombre de vélos disponibles dans une station  $S_i$  à un instant donné est représenté par le marquage de la place  $PS_i$ . Il est noté par  $M(PS_i)$  égal au nombre de jetons disponibles dans  $PS_i$ . La capacité de chaque place, notée par  $C_i$ , correspond au nombre de points d'attache de chaque station correspondante  $S_i$ . Elle est déterminée, lors de la conception du système, en fonction de l'environnement de la station et de sa fréquentation estimée.
- La dynamique des vélos est assurée par le déplacement de jetons d'une place à une autre par les franchissements des transitions notées par  $TS_{ij}$  liant à l'aide des arcs les différentes places. Les indices «  $ij$  » indiquent que le vélo a été prélevé par un usager d'une station  $S_i$  et a été déposé par ce même usager dans une autre station  $S_j$ . On voit sur le réseau des transitions de type  $TS_{ii}$  avec  $i = j$  (boucle sur une même place). Ceci est dû à la possibilité qu'un usager prenne un vélo d'une station  $S_i$  et le dépose, après avoir effectué son trajet, dans cette même station.
- En plus des différents arcs classiques reliant les transitions aux places et vice-versa, on voit sur le

réseau des arcs inhibiteurs de poids  $C_i$  reliant les transitions  $TS_{ij}$  aux places  $PS_i$ . Ces arcs inhibiteurs permettent d'exprimer la capacité limitée  $C_i$  de chaque station ( $C_i$  correspond au nombre de points d'attache installés dans une station  $S_i$ ). Par conséquent, un usager ne peut pas déposer son vélo dans une station pleine. En termes du RdP, une transition  $T_{ij}$  peut être franchie que si  $M(PS_j) < C_i$ .

Le type des transitions de ce module doit être stochastique. En effet, les délais des trajets, les temps d'utilisation et les distances à parcourir par les usagers sont aléatoires. Ceci engendre un processus stochastique. En pratique, l'estimation des paramètres à associer à ces transitions dépendra de l'environnement de chaque station et de sa fréquentation estimée.

### 3.5 Description du module de déplacement du véhicule de régulation :

- Le module représentant le déplacement du véhicule à remorque visitant les différentes stations pour le contrôle de régulation se compose de l'ensemble des places  $PR_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Chaque place  $PR_i$  peut contenir des jetons représentant l'ensemble des vélos disponibles dans le véhicule au moment de la visite de la station correspondante  $S_i$ . L'ensemble des transitions notées  $TR_{ij}$  permet la modélisation des déplacements qu'effectue le véhicule d'une station à une autre après chaque contrôle de régulation.
- Ce circuit est bien sûr lié à chaque station (à chaque place  $PS_i$ ) afin d'assurer la fonction de régulation. Ce lien est fait au moyen de l'ensemble des transitions notées par  $TR_i$ ,  $TS_i$ ,  $TE_i$  et  $TO_i$  et de l'ensemble des arcs associés composant les modules de régulation.
- En supposant que le contrôle de régulation d'une station  $S_i$  vient d'être terminé. Vu la section 3.3, la place  $PC_i$  sera marquée,  $M(PC_i) = 1$ , indiquant que le contrôle est effectué et que le véhicule est en cours de déplacement vers une station voisine  $S_j$  en franchissant une transition de type  $TR_{ij}$ .
- Formellement, une transition  $TR_{ij}$  (représentant le déplacement du véhicule de régulation de la station  $i$  à une autre station  $j$ ) est franchissable si et seulement si :

$$M(PC_i) \geq 1 \quad (24)$$

Ce qui est vrai lorsque le contrôle de la station  $S_j$  est terminé qui se produit en franchissant la transition  $TE_i$  qui dépose un jeton dans la place  $PC_i$ .

$$M(PR_i) \geq M(PR_i) \quad (25)$$

Cette condition est toujours vraie. Elle est due au poids de l'arc allant de la place  $PR_i$  et la transition  $TR_{ij}$  afin que son franchissement déplace l'ensemble des jetons (vélos)

restant dans  $PR_i$  (véhicule de régulation) vers la prochaine station à contrôler.

- Le franchissement de la transition  $TR_{ij}$  (après un certain délai correspondant à la temporisation associée à cette transition) va faire évoluer le marquage du réseau comme suit :

$$M'(PR_j) = M(PR_j) + M(PR_i) = M(PR_i) \quad (26)$$

Signifie que le véhicule de régulation est maintenant au niveau de la station  $S_j$  pour un contrôle de régulation.

$$M'(PC_i) = M(PC_i) - 1 = 0 \quad (27)$$

A noter que la place  $PC_i$  contenait un seul jeton lors de la validation de la transition  $TR_{ij}$ . Maintenant que la place  $PC_i$  est marquée, un nouveau contrôle de régulation de la station  $S_i$  va pouvoir avoir lieu lors de la prochaine visite du véhicule de régulation.

REMARQUE. — Dans notre exemple à trois stations, nous avons utilisé un seul véhicule de régulation. Bien évidemment, pour un réseau concret (à  $N$  stations), la régulation doit se faire par quartier. Ainsi, le réseau doit être réparti et plusieurs véhicules et circuits de régulation doivent être utilisés et représentés en fonction de cette répartition.

### 3.6 Généralisation et dimensionnement du modèle pour un réseau à N stations

La généralisation du modèle développé à  $N$  stations est intuitive à partir du modèle présenté à trois stations. Le nombre de composants (places, transitions et arcs) nécessaires pour la construction d'un à  $N$  stations est déterminé, module par module, dans cette section.

**Module de déplacement de vélos par les usagers :** En se référant au module présenté dans la section 3.4 :

- Les  $N$  stations  $S_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) sont modélisables par  $N$  places notées par  $PS_i$ .
- Le bouclage entre toutes les stations (l'ensemble des places  $PS_i$ ), puisque les vélos peuvent passer d'une station à une autre, nécessite :  $N^2$  transitions.
- L'ensemble des arcs liant les places aux transitions peut être évalué à  $2*N^2$  arcs classiques et  $N^2$  arcs inhibiteurs.

**Module de régulation du nombre de vélos dans les stations :** En se référant à la présentation de ce module dans la section 3.3, on voit que la construction de ce module nécessite :

- 3 places notées  $PR_i$ ,  $PO_i$  et  $PC_i$  (en plus de la place  $PS_i$  déjà comptabilisée en haut). Et comme, ce module se duplique au niveau de chaque station  $S_i$ , le nombre de ce type de places est donc  $3*N$  places.
- 4 transitions notées  $TO_i$ ,  $TR_i$ ,  $TS_i$  et  $TE_i$ . Pour la même raison, le nombre de ce type de transitions

pour un réseau à  $N$  stations est donc de  $4*N$  transitions.

- L'ensemble des arcs liant les places aux transitions (pour un réseau de  $N$  stations) s'élève à  $19*N$  arcs classiques et  $7*N$  arcs inhibiteurs.

**Module de déplacement du véhicule de régulation :**

Pour ce qui est de la représentation de ce module, il est réalisé au moyen des transitions notées par  $TR_{ij}$ . Il faut au total  $N$  transitions de ce type et  $3*N$  arcs classiques. Les places de types  $PR_i$  sont déjà comptabilisées avec le module de régulation.

Ainsi, pour un réseau de  $N$  stations, le modèle RdP global sera composé de :

- $4*N$  places
- $N^2 + 5*N$  transitions
- $2*N^2 + 21*N$  arcs classiques
- $N^2 + 7*N$  arcs inhibiteurs

**4 VALIDATION DU MODELE A L'AIDE DE LA SIMULATION**

Après le développement et l'analyse formelle du fonctionnement du modèle, nous présentons ici quelques résultats des simulations effectuées pour la validation de ce modèle. Pour se faire, nous avons, tout d'abord, réaliser un outil de simulation (sous Delphi) à partir d'un simulateur réalisé pour le cas des BDSPN (labadi et al., 2007) utilisant l'aspect des arcs à poids variables. Ainsi, l'outil réalisé permet de simuler et d'évaluer les performances des réseaux de Petri stochastiques et/ou déterministes pouvant prendre en compte :

- Des arcs à poids variables en fonction du marquage actuel du réseau.
- Des transitions pouvant être immédiates, déterministes et/ou stochastiques.
- Des politiques de gestion des horloges associées aux temporisations des transitions pouvant être du type « continue process » ou « restart process ».

A titre d'illustration du fonctionnement du modèle, les graphiques intitulés « Evolution du nombre de vélos dans la station  $S_i$  » de la figure 7 sont obtenus pour une configuration dont les paramètres du modèle sont donnés par les trois tableaux ci-dessous. Nous avons considéré le même système de la figure 2.

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
10	10	10	20	20	20

**Tableau 2 :** Paramètres  $R_i$  et  $C_i$  du système (seuil de régulation et capacités des stations)

$M_0(PS_1)$	$M_0(PS_2)$	$M_0(PS_3)$	$M_0(PR_1)$	$M_0(PR_2)$	$M_0(PR_3)$
15	15	15	10	0	0
0	0	0	0	0	0

**Tableau 3 :** Marquage initial du RdP (état initial)

$TS_{11}$	$TS_{12}$	$TS_{13}$	$TS_{21}$	$TS_{22}$	$TS_{23}$
E, C, 20	E, C, 5	E, C, 10	E, C, 5	E, C, 20	E, C, 5
$TS_{31}$	$TS_{32}$	$TS_{33}$	$TR_1$	$TO_1$	$TS_1$
E, C, 10	E, C, 5	E, C, 20	E, C, 3	I, 0	E, C, 3
$TR_2$	$TO_2$	$TS_2$	$TR_3$	$TO_3$	$TS_3$
E, C, 3	I, 0	E, C, 3	E, C, 3	I, 0	E, C, 3
$TR_{12}$	$TR_{23}$	$TR_{31}$	$TE_1$	$TE_2$	$TE_3$
E, C, 15	E, C, 15	E, C, 15	I, 0	I, 0	I, 0

**Tableau 4 :** Types des transitions (I : immédiate, E : Exponentielle, D : Déterministe) ; Types des politiques associées à la gestion des temporisations (C : continue process, R : restart process) et Délais moyens (en mn) associés aux transitions.

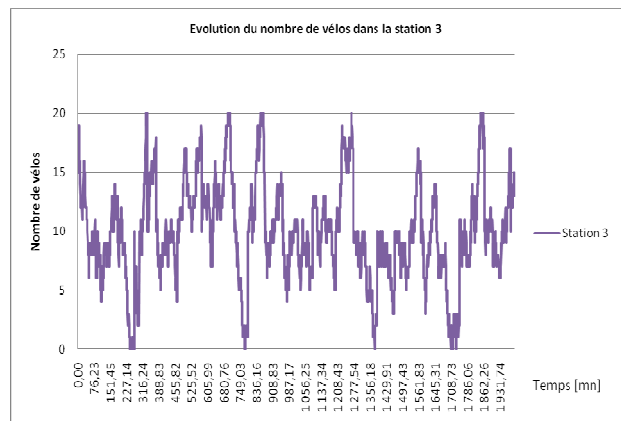
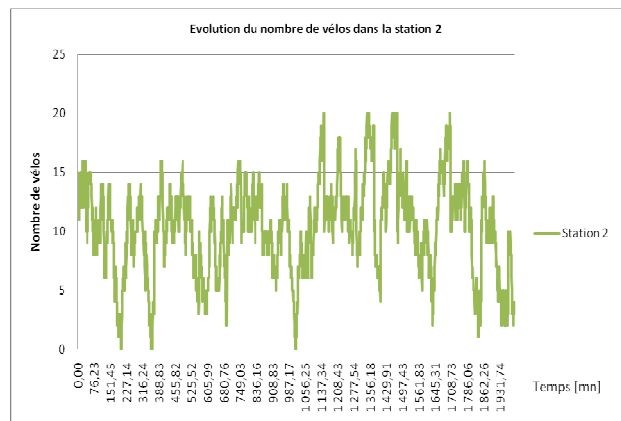
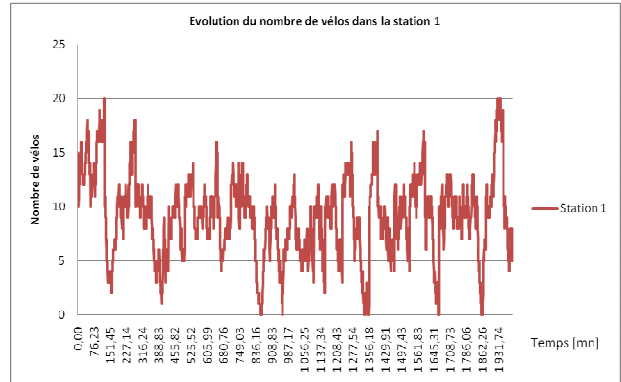


Figure 7 : Quelques résultats de simulation du modèle

On peut constater sur les trois graphiques que le nombre des vélos (marquage des places  $PS_i$ ) dans les trois stations « oscille » autour de la valeur de régulation  $R_i$  (fixée ici à 10 pour toutes les stations). On peut voir que

la limite  $C_i$  fixée ici à 20 pour toutes les stations est également respectée.

A l'aide de la simulation, le tableau ci-dessous donne le calcul des marquages moyens des places du RdP. Ceux des places  $PS_i$  correspondent au nombre moyen de vélos dans les stations correspondantes.

$M_0(PS_1)$	$M_0(PS_2)$	$M_0(PS_3)$	$M_0(PR_1)$	$M_0(PR_2)$	$M_0(PR_3)$
9,51	10,14	10,21	7,98	8,64	8,48
$M_0(PO_1)$	$M_0(PO_2)$	$M_0(PO_3)$	$M_0(PC_1)$	$M_0(PC_2)$	$M_0(PC_3)$
0,07	0,08	0,08	0,28	0,28	0,29

**Tableau 5 :** Marquage moyen

Les simulations effectuées confirment pertinemment que le comportement du modèle est conforme à notre analyse formelle de la section précédente. Ainsi, le modèle dynamique développé est efficace aussi bien pour l'analyse que pour la simulation.

## 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cet article montre clairement le grand potentiel des réseaux de Petri comme outil de modélisation, d'analyse et de simulation des systèmes de vélos en libre-service. Ce travail est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre, l'exploitation et la régulation de ce type de systèmes. Le sujet soulève de considérables questions notamment le dimensionnement du système (taille des stations, seuils de régulation, capacité de la flotte de véhicules, ...) en vue d'une régulation optimale du système. En termes du modèle développé, avoir une *régulation optimale* revient à dimensionner le système de façon à éviter au maximum les marquages des stations  $S_i$  aux deux niveaux extrêmes :  $M(PS_i) = C_i$  et  $M(PS_i) = 0$  (voir la figure 7). Le premier niveau correspond à la saturation des stations et le deuxième niveau correspond à des stations vides. Sans doute, ces deux niveaux sont des situations inconfortables voir désagréables pour les usagers. Ce travail va se poursuivre dans le cadre d'une thèse de doctorat qui sera lancée en janvier 2010. Une collaboration avec un exploitant de ce type de systèmes en île de France est en cours de discussion.

## REFERENCES

Abbas-Turki, A., (2003) « Contribution à la modélisation et à la commande par les réseaux de Petri VOD : Application à la minimisation des temps de correspondance des systèmes de transport public », Thèse Belfort.

Bouyekhf, R., Abbas-Turki, A., Grunder, O., El Moudni, A., (2003) "modelling, performance evaluation and planning of public transport systems using

generalized stochastic Petri nets", Transport reviews, vol. 23, No. 1, pp.51-69.

Castelain, E., Mesghouni, K., (2002) "Traffic control with regulation of the passenger flow, modelling of the urban transport network with High level Petri Nets", IEEE SMC02, Hammamet (Tunisie).

David, R., Alla, H., (1992) Du grafset aux réseaux de Petri, Paris, Editions Hermès.

Di Cesare, F., Kulp, P.T., Gile, M., List, G., (1994) « The application of Petri nets to the Modelling, Analysis and Control of Intelligent Urban Traffic Networks », Proc. of the APN'94, Robert Valette, Zaragoza, Spain, p. 2-15.

Di Febraro, A., Giglio, D., Sacco, N., (2004) « Urban traffic control structure based on hybrid Petri nets », IEEE Transactions on Intelligent Transportation systems, vol. 5, n° 4, p. 224-237.

Gallego, J.L., (1996) « Nouvelles approches pour la commande des carrefours », thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace.

Jensen K., (1992) "Coloured Petri Nets. Basic concepts, analysis method and practical use", vol. 1, EATC monographs on Theoretical Computer Science, Springer Verlag.

Labadi, K., Chen, H., Amodeo, L., (2007) « Modelling and Performance Evaluation of Inventory Systems Using Batch Deterministic and Stochastic Petri Nets », IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and reviews, vol. 37, N° 6 pp.1287-1302.

Murata T., (1989) "Petri nets: Properties, analysis and applications", *Proceedings of the IEEE*, 77(4), pp.541-580.

Nait-Sidi-Moh, A., (2003) « Contribution à la modélisation, à l'analyse et à la commande des systèmes de transport public par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus) », Thèse de doctorat de l'université de technologie de Belfort Montbéliard, France.

Tolba, C., (2004) « Contribution à l'utilisation des réseaux de Petri pour la modélisation et la régulation du trafic urbain et interurbain », thèse de doctorat, Université de Technologie de Belfort Montbéliard.

Tolba, C., Lefebvre, P., Thomas, D., El Moudni, A., (2008) « Commande des feux de signalisation par réseaux de Petri hybrides », JESA, Vol.42, n°5, pp 579-612.

Wang, H., List, G.F., Di Cesare, F., (1993) « Modelling and Evaluation of Traffic Signal Control Using Timed Petri Nets », CESA, vol. 2, Le Touquet, France, p.180-185.

Wang, J., Jin, C., Deng, Y., (1999) "Performance analysis of traffic networks based on stochastic timed Petri net models" IEEE ICECCS'99, 1999, pp. 77-58.